Media e varianza di una variabile casuale geometrica

La variabile casuale geometrica modella il numero di prove bernoulliane da eseguire prima di osservare il primo successo. Le prove sono fra di loro indipendenti e la probabilità di successo è costante e uguale a p.
La funzione di probabilità di una variabile casuale X geometrica ($X = \{0, 1, 2, \ldots\}$) di parametro p ($0 < p < 1$) è:

$$f(x) = p(1-p)^x.$$

La "somma infinita" è uguale a 1:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = p \times \frac{1}{p} = 1.$$

Prima di calcolare il valore atteso di X, ricordiamo che (sviluppando in serie di Taylor)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Nel nostro caso $1-x$ è la probabilità p di successo e la somma si estende sui valori di x che vanno da zero a infinito. La formula precedente diventa quindi

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)(1-p)^x.$$

Se moltiplichiamo $(1-p)^x$ per p, la serie rappresenta il valore atteso di $X+1$:

$$E(X+1) = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)(1-p)^x p = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

A questo punto è immediato trovare il valore atteso di X:

$$E(X) = E(X+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$

In modo analogo, lo sviluppo in serie di Taylor di $1/p^3$ è dato da

$$\frac{1}{p^3} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(x+1)(x+2)}{2}(1-p)^x.$$

Se moltiplichiamo la quantità precedente per $2p$ otteniamo il valore atteso di $(X+1)(X+2)$ e, quindi,

$$E\left[(X+1)(X+2)\right] = E\left[X^2 + 3X + 2\right] = \frac{2}{p^2}.$$

Il valore atteso del quadrato di X è quindi:

$$E(X^2) = \frac{2}{p^2} - 3\frac{1-p}{p} - 2 = \frac{p^2 - 3p + 2}{p^2},$$

da cui si ricava

$$Var(X) = \frac{p^2 - 3p + 2}{p^2} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$