Media e varianza di una variabile casuale di Poisson

Ricordiamo che il *numero di Nepero* e può essere *definito* come segue:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

e che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Con questo risultato è facile dimostrare che per una variabile casuale di Poisson

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = 1.$$

Infatti,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{-\mu}e^{\mu} = 1.$$

Valore atteso. Sia X una variabile casuale di Poisson con parametro μ. Il valore atteso di X è dato da

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\mu^x}{x!}.$$

Consideriamo ora la somma infinita

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\mu^x}{x!},$$

osservando che il primo addendo (per $x = 0$) vale 0. La somma può quindi essere scritta come segue:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\mu^x}{x!}.$$

Possiamo ora semplificare, dividendo per x numeratore e denominatore, ottenendo

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^x}{(x-1)!}.$$

Per far comparire $(x-1)$ anche al numeratore (come esponente di μ) scriviamo μ^x come $\mu \times \mu^{x-1}$; μ (che è costante) può essere portato fuori dalla sommatoria:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^x}{(x-1)!} = \mu \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}.$$

Osserviamo ora che gli addendi della somma infinita quando $x = 1, 2, 3, \ldots$ sono $\mu^0/0!$, $\mu^1/1!$, $\mu^2/2!$, ... In altre parole:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu}.$$

Mettendo tutto insieme, quindi,

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = e^{-\mu} e^{\mu} \mu = \mu.$$

Varianza. Trovare la varianza di una Poisson è più "laborioso" e passa per il calcolo di $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}.$$

I primi passaggi ricalcano quanto fatto per trovare la media: portare fuori dalla sommatoria $e^{-\mu}$, semplificare dividendo numeratore e denominatore per x, portare fuori dalla sommatoria μ per arrivare a

$$E(X^2) = e^{-\mu} \mu \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}.$$

Se $v = x - 1$, l'espressione precedente diventa

$$E(X^2) = e^{-\mu} \mu \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) \frac{\mu^v}{v!}.$$

Se ora riportiamo dentro la sommatoria $e^{-\mu}$

$$E(X^2) = \mu \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) \frac{e^{-\mu}\mu^v}{v!}$$

e osserviamo "per bene" tutta la sommatoria, vediamo che questa rappresenta il valore atteso della variabile casuale $V+1$, dove V è una Poisson con valore atteso μ. Pertanto, $E(V+1) = E(V) + 1 = \mu + 1$ e

$$E(X^2) = \mu(\mu + 1).$$

Adesso è immediato trovare la varianza:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \mu(\mu + 1) - \mu^2 = \mu.$$