Media e varianza di una variabile casuale esponenziale

Sia X una variabile casuale esponenziale con funzione di densità di probabilità data da
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
con $x > 0$ e $\lambda > 0$. Ricordando che una *primitiva* di $f(x)$ è data da $-e^{-\lambda x}$, è facile dimostrare che
$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$$
e che la funzione di ripartizione $F(x)$ è data da
$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = 1 - e^{-\lambda x}.$$
Il valore atteso della variabile casuale esponenziale è dato da
$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} dx,$$
e si può calcolare ricordando che una primitiva di $xe^{-\lambda x}$ è data da
$$e^{-\lambda x}\left(-\frac{1}{\lambda^2} - \frac{x}{\lambda}\right).$$
Pertanto
$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$
Il valore atteso del quadrato di una variabile casuale esponenziale è dato da
$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \times \lambda e^{-\lambda x} dx,$$
e si può calcolare ricordando che una primitiva di $x^2 e^{-\lambda x}$ è data da
$$e^{-\lambda x}\left(-\frac{2}{\lambda^3} - \frac{2x}{\lambda^2} - \frac{x^2}{\lambda}\right).$$
Pertanto
$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \times \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Possiamo ora calcolare $Var(X)$:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$