Alcune caratteristiche della funzione di densità di probabilità della normale standard

La funzione di densità di probabilità della variabile casuale normale standard è

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

e, quindi, $f(z) = f(-z)$ (la distribuzione è simmetrica rispetto al punto di ascissa $z = 0$).
La derivata prima

$$f'(z) = -\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

si annulla quando $z = 0$.
La derivata seconda è

$$f''(z) = \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

Quando $z = 0$ la derivata seconda è uguale a $-1/\sqrt{2\pi}$ e, quindi, la funzione di densità di probabilità ha un *massimo* quando $z = 0$.
Inoltre la derivata seconda si annulla quando $z = \pm 1$. Infatti l'equazione

$$\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

semplificata, diventa $z^2 = 1$. Quando $z = \pm 1$, la funzione di densità di probabilità della normale standard presenta due *punti di flesso*.
Infine, $f(z) > 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$, per cui la funzione di densità di probabilità della variabile casuale normale standard non si annulla mai (ma presenta due *asintoti orizzontali* quando $z = \pm\infty$).
L'area sotto tutto il grafico della funzione di densità di probabilità della variabile casuale normale standard è esattamente uguale a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

Questo risultato si ottiene immediatamente a partire da un risultato fondamentale che va sotto il nome di *integrale di Gauss*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

impiegando la sostituzione $z/\sqrt{2} = x$ e $dz = \sqrt{2}dx$.
Questa stessa sostituzione permette di verificare immediatamente che, se X è una variabile casuale normale con media μ e varianza σ^2, $\forall x_1, x_2$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz,$$

dove $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ e $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.
In virtù di questa "equivalenza" fra la variabile casuale normale standard e una qualsiasi variabile casuale X normale con media μ e varianza σ^2, i risultati precedenti diventano

- la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale X normale è simmetrica rispetto al punto di ascissa $x = \mu$;
- la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale X normale presenta un massimo nel punto di ascissa $x = \mu$;
- la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale X normale presenta due punti di flesso, simmetrici, nei punti di ascissa $x = \mu \pm \sigma$;
- la funzione di densità di probabilità di una variabile casuale X normale presenta due asintoti orizzontali quando $x = \pm\infty$;
- l'area sotto tutto il grafico della funzione di densità di probabilità di una variabile casuale X normale è esattamente uguale a 1.

Il valore atteso della normale standard

Vogliamo dimostrare che il valore atteso della normale standard è uguale a zero. In realtà, essendo la distribuzione simmetrica ed estendendosi da meno infinito a più infinito, è abbastanza "logico" pensare che il valore "centrale" (cioè 0) sia anche la media della distribuzione. Un matematico però obietterebbe che prima bisogna far vedere che l'integrale (che si estende appunto da meno infinito a più infinito) non diverga.
Il valore atteso della variabile casuale Z normale standard è

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz.$$

È opportuno spezzare l'integrale in due parti, la prima che va da 0 a più infinito e la seconda che va da meno infinito a 0. Iniziamo con la prima, calcolando

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} ze^{-z^2/2}dz.$$

Una primitiva di $ze^{-z^2/2}$ è $-e^{-z^2/2}$ e, quindi,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} ze^{-z^2/2}dz = -e^{-z^2/2}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Il secondo integrale vale invece -1. Infatti,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} ze^{-z^2/2}dz = -e^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{0} = -1.$$

Mettendo insieme i due risultati abbiamo quindi

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-z^2/2}dz = 1 - 1 = 0.$$

La varianza della normale standard

Dal momento che $E(Z) = 0$, avremo che $Var(Z) = E(Z^2)$, cioè,

$$Var(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2e^{-z^2/2}dz.$$

Per calcolare questo integrale usiamo l'integrazione per parti, ponendo $u = z$ e $v' = ze^{-z^2/2}$, di modo che $u' = 1$ e $v = -e^{-z^2/2}$. Pertanto

$$Var(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz.$$

Il primo addendo è uguale a 0 (è sostanzialmente il valore atteso di Z), mentre l'integrale che compare nel secondo addendo è (come abbiamo visto sopra) uguale a $\sqrt{2\pi}$, di modo che $Var(Z) = 1$.

Valore atteso di una normale

Il calcolo si basa sulla sostituzione $z = (x - \mu)/\sigma$, per cui $dz/dx = 1/\sigma$ e $dx = \sigma dz$. Avremo quindi che

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

Il valore atteso di una normale è μ:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + z\sigma) e^{-z^2/2} \sigma dz.$$

L'integrale si spezza quindi nella somma di due addendi. Il primo addendo vale μ; infatti

$$\frac{\mu\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = \mu \times 1 = \mu.$$

Il secondo addendo vale zero; infatti

$$\frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz = \sigma \times 0 = 0.$$

Varianza di una normale

La varianza di una normale è σ^2:

$$Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx.$$

Nell'eseguire la sostituzione $z = (x - \mu)/\sigma$ dobbiamo considerare che:

$$(x-\mu)^2 = (\mu + z\sigma - \mu)^2 = z^2\sigma^2$$

e che $dx = \sigma dz$. Abbiamo quindi:

$$\frac{\sigma^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz,$$

cioè

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2,$$

dal momento che l'integrale vale $\sqrt{2\pi}$, come abbiamo visto calcolando la varianza di Z.
Il valore atteso e la varianza di una normale qualsiasi possono essere calcolati senza ricorrere agli integrali, dopo aver fatto vedere che qualsiasi normale può essere ricondotta a una normale standard, impiegando le proprietà degli operatori valore atteso e varianza. Infatti,

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left(E(X)-\mu\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\mu-\mu\right) = 0.$$

$$Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Alcune curiosità sulla normale

La distribuzione normale sarebbe stata "scoperta" da de Moivre, come approssimazione della binomiale. È stato tuttavia Gauss a derivarla prendendo in considerazione gli errori di misura nel campo dell'astronomia (la si trova nel testo *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*). Può essere interessante riportare il modo in cui Gauss ha ricavato la distribuzione normale, riprendendo quanto scrive Giardina.[1]
Gauss cercava una opportuna funzione $f(x)$ (dove x è l'errore di misura, che può assumere valori negativi, nulli o positivi) che soddisfacesse le seguenti richieste:

1. Se si misura ripetutamente una stessa grandezza (essendo le misure tutte degne della stessa "fiducia"), allora il valore più probabile della grandezza in esame è la media aritmetica. Considerando gli errori di misura, questo vuol dire che la funzione f cercata deve ammettere un massimo in corrispondenza dell'errore nullo ($x = 0$). Quindi la derivata prima della funzione f deve annullarsi quando $x = 0$ e in questo punto la derivata seconda deve essere minore di zero.

2. La probabilità di commettere un certo errore $|x|$ (in valore assoluto) è funzione decrescente del valore stesso. Quindi la derivata prima della f deve essere positiva quando $x < 0$ e negativa quando $x > 0$.

[1] Giardina B. *Introduzione alla statistica matematica.* Franco Angeli, Milano, 1987.

3. Infine la funzione deve essere tale che $f(x) = f(-x)$, perché la (densità di) probabilità di commettere due errori x_1, x_2 uguali in valore assoluto, ma di segno opposto deve essere la stessa.

Non esiste una sola funzione in grado di soddisfare queste tre richieste. La distribuzione gaussiana deriva dall'aver esplicitato le tre richieste precedenti nell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = -yx,$$

dove $y = f(x)$, con $y \geq 0$ e $-\infty < x < \infty$.
Una simile equazione è piuttosto semplice da risolvere. Il primo passaggio è "isolare" x e y:

$$\frac{dy}{y} = -xdx.$$

A questo punto si integra:

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int xdx.$$

Ricordano che la derivata del logaritmo (naturale) di u è $1/u$ e che la derivata di u^2 è $2u$, abbiamo

$$\log(y) = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Per "eliminare" il logaritmo facciamo l'esponenziale:

$$y = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + C\right) = k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

(dove $k = e^C$).
A questo punto occorre ricordare che l'*integrale di Gauss* vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

da cui si ricava

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi};$$

questa formula ci permette di ricavare k, ricordando che l'area sotto tutta la curva normale deve essere uguale a 1,

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

e di poter finalmente scrivere la funzione cercata

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

che rappresenta la normale standard.
Strettamente collegata con la normale è la cosiddetta *error function*, indicata spesso con erf(x):

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-u^2} du,$$

che rappresenta la probabilità che una variabile casuale X normalmente distribuita con media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1/2$ cada nell'intervallo $(-x, x)$. Nel caso di una normale con media $\mu = 0$ e varianza σ^2 la probabilità che una osservazione cada nell'intervallo $(-x, x)$ è data da

$$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

La funzione di ripartizione Φ della normale standard è ricavabile dalla *error function*, dal momento che

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

L'integrale presente nella *error function* non può essere espresso in forma "chiusa" ricorrendo a funzioni elementari. È però possibile espandere e^{-x^2} in serie di Taylor

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

e, integrando termine a termine, ottenere la serie di Taylor della *error function*:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Mentre vari *software* basano il calcolo della funzione di ripartizione della normale sulla *error function*, R preferisce calcolare i valori della funzione di ripartizione della normale (con la funzione `pnorm`) impiegando un algoritmo proposto da Cody[2] e ricavare da questi i valori della *error function* (e di altre ad essa collegate), come dettagliato nell'*help* di `pnorm`:

[2] Cody, W. D. (1993) Algorithm 715: SPECFUN – A portable FORTRAN package of special function routines and test drivers. ACM Transactions on Mathematical Software 19, 22–32.

```
## if you want the so-called 'error function'
erf <- function(x) 2 * pnorm(x * sqrt(2)) - 1
## (see Abramowitz and Stegun 29.2.29)
## and the so-called 'complementary error function'
erfc <- function(x) 2 * pnorm(x * sqrt(2), lower = FALSE)
## and the inverses
erfinv <- function (x) qnorm((1 + x)/2)/sqrt(2)
erfcinv <- function (x) qnorm(x/2, lower = FALSE)/sqrt(2)
```